4. PARAMETRAGE DES MECANISMES

Elaboré par : Youssef RAHOU, novembre 2018

1. Introduction et objectifs :

Toujours, en s'intéressant à établir les outils nécessaires et pratiques permettant de mener une étude cinématique, statique ou dynamique d'un mécanisme donné, et en continuité avec le chapitre précédent -schématisation des mécanismes-, qui vous permet d'associer un schéma cinématique à un mécanisme réel, **il est maintenant nécessaire de passer à la quantification des grandeurs caractérisant ce schéma cinématique**, grandeurs linéaires comme la position, la vitesse, l'accélération ou la force, ou angulaires comme l'angle, la vitesse angulaire ou le couple. **Ceci ne serait possible que si on définissait déjà des repères dans lesquels ces grandeurs seront exprimées**. Par conséquent, **pour chaque solide (Si) du schéma cinématique, on associera un repère** $\boldsymbol{Ri}(\boldsymbol{Oi}, \vec{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{i}, \vec{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{i}, \vec{\boldsymbol{z}}i)$.

L'objectif de ce chapitre, est de décrire le paramétrage permettant **de positionner et d'orienter un solide (Si) à travers son repère associé** $Ri(\boldsymbol{Oi}, \vec{x}i, \vec{y}i, \vec{z}i)$ **par rapport à un autre repère absolu** $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{O}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ **(lié au bâti par exemple).**

Un objectif secondaire de ce chapitre consiste à **rappeler les outils mathématiques nécessaires** lors du paramétrage d'un mécanisme.

Il est à noter que les repères $\boldsymbol{Ri}(\boldsymbol{Oi}, \vec{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{i}, \vec{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{i}, \vec{\boldsymbol{z}}\boldsymbol{i})$ utilisés en sciences de l'ingénieur, sont en général à bases orthonormées directes, c'est-à-dire que :

- $\vec{x}i \perp \vec{y}i$, $\vec{y}i \perp \vec{z}i$ et $\vec{z}i \perp \vec{x}i$.
- $||\vec{x}i||=||\vec{y}i||=||\vec{z}i||=1$.
- $\vec{x}i \wedge \vec{y}i = +\vec{z}i$, $\vec{y}i \wedge \vec{z}i = +\vec{x}i$, $\vec{z}i \wedge \vec{x}i = +\vec{y}i$.

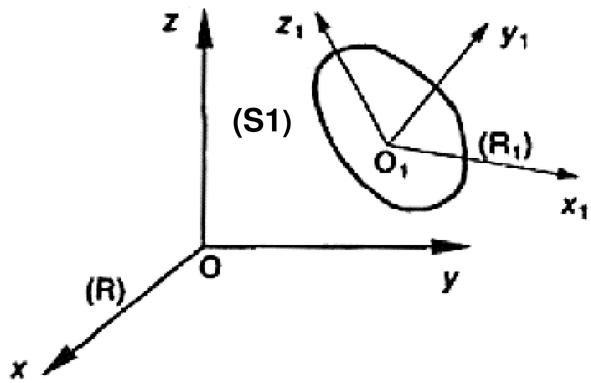


Figure.1. Configuration générale pour paramétrer un solide (S1).

2. Paramétrage de la position d'un solide indéformable :

Soit un solide indéformable (S1), auquel on associe un repère $\boldsymbol{R1}(\boldsymbol{O1}, \vec{x}1, \vec{y}1, \vec{z}1)$, **ce repère est caractérisé par son origine 0_1 ainsi que sa base** $(\vec{\boldsymbol{x}}\mathbf{1}, \vec{\boldsymbol{y}}\mathbf{1}, \vec{\boldsymbol{z}}\mathbf{1})$.

Positionner le solide (S1) consiste donc à :

- **Positionner l'origine O_1** de son repère associé R_1 par rapport au repère **R**.
- **Orienter la base** $(\vec{\boldsymbol{x}}\mathbf{1}, \vec{\boldsymbol{y}}\mathbf{1}, \vec{\boldsymbol{z}}\mathbf{1})$ de son repère associé R_1 **par rapport à la base** $(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}, \vec{\boldsymbol{z}})$ du repère **R**.

2.1. Paramétrage de la position de l'origine du repère associé à un solide :

Trois types de paramétrage sont utilisés pour positionner un point, qui est ici l'origine O_1, par rapport au repère absolu **R** :

- Les coordonnées cartésiennes, il s'agit du système de paramétrage le plus courant.
- Les coordonnées cylindriques, plutôt utilisées pour des solides présentant un axe de révolution.
- Les coordonnées sphériques, plutôt utilisées pour des solides présentant une symétrie sphérique.

2.1.1. Paramétrage par des coordonnées cartésiennes :

La position de l'origine du repère O_1 dans le repère **R** est défini par **le vecteur position** $\overrightarrow{\boldsymbol{OO_1}}$ tel que :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OO_1}} = x.\vec{\boldsymbol{x}} + y.\vec{\boldsymbol{y}} + z.\vec{\boldsymbol{z}}$$

Avec :

- $x = \overrightarrow{\boldsymbol{OO_1}}.\vec{\boldsymbol{x}}$, appelé abscisse.
- $y = \overrightarrow{\boldsymbol{OO_1}}.$ y, appelé ordonnée.
- $z = \overrightarrow{\boldsymbol{OO_1}}.\vec{\boldsymbol{z}}$, appelé cote.

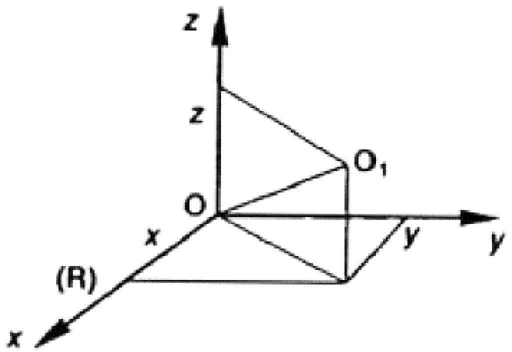


Figure.2. Système de coordonnées cartésiennes.

Remarque :

- La distance OO_1 s'exprime en fonction des coordonnées cartésiennes par la relation :

$$\mathbf{OO_1} = \sqrt{\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 + \mathbf{z}^2}$$

2.1.2. **Paramétrage par des coordonnées cylindriques :**

A. Définition :

Les trois coordonnées cylindriques sont : **r, θ et z,** la position de l'origine du repère O_1 dans le repère **R** est défini par **le vecteur position** $\overrightarrow{\boldsymbol{OO_1}}$ tel que :

$$\overrightarrow{OO_1} = r.\vec{u} + z.\vec{z}$$

Avec :

- r.$\vec{\boldsymbol{u}}$ = $\overrightarrow{\boldsymbol{OH}}$, tel que H est la projection orthogonale du point O_1 sur le plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$.
- $\vec{\boldsymbol{u}}$: vecteur unitaire de direction OH, tel que $\vec{\boldsymbol{u}} = \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{OH}}}{||\overrightarrow{\boldsymbol{OH}}||}$.
- r = OH, distance entre O et H qui est toujours positive.
- θ=$(\vec{x}, \vec{u})$.
- z : projection orthogonale du point O_1 sur le plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$, z= $\overrightarrow{\boldsymbol{OO_1}}.\vec{\boldsymbol{z}}$.

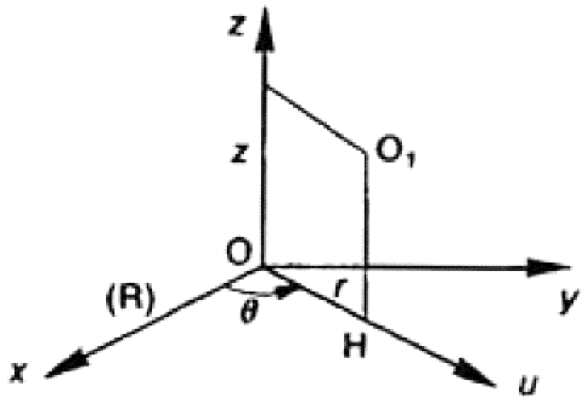


Figure.3. Système de coordonnées cylindriques.

B. Relations entre coordonnées cylindriques et cartésiennes :

Par identification, on a : $\overrightarrow{\boldsymbol{OO_1}}$=r.$\vec{\boldsymbol{u}}$ + z.$\vec{\boldsymbol{z}}$ = x.$\vec{\boldsymbol{x}}$ + y.$\vec{\boldsymbol{y}}$ + z.$\vec{\boldsymbol{z}}$.

En projetant $\vec{\boldsymbol{u}}$ dans la base ($\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}, \vec{\boldsymbol{z}}$), on obtient les deux relations suivantes :

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

Remarque :

- r s'exprime en fonction des coordonnées cartésiennes par la relation :

$$\mathbf{r_{cyl}} = OH = \sqrt{\mathbf{x^2 + y^2}}$$

2.1.3. **Paramétrage par des coordonnées sphériques :**

A. Définition :

Les trois coordonnées sphériques sont : r, θ et φ, la position de l'origine du repère O_1 dans le repère **R** est défini par **le vecteur position** $\overrightarrow{OO_1}$ tel que :

$$\overrightarrow{OO_1}=r.\vec{w}$$

Avec :

- $\vec{u}$: vecteur unitaire de direction OH, tel que $\vec{u}=\frac{\overrightarrow{OH}}{\|\overrightarrow{OH}\|}$, H est la projection orthogonale du point O_1 sur le plan $(O,\vec{x},\vec{y})$.
- $\vec{w}$: vecteur unitaire de direction OO_1, tel que $\vec{w}=\frac{\overrightarrow{OO_1}}{\|\overrightarrow{OO_1}\|}$.
- r = $\overline{OO}_1$, mesure algébrique sur l'axe (O, $\vec{w}$), qui peut être positive ou négative.
- θ=$(\vec{x},\vec{u})$, φ=$(\vec{z},\vec{w})$.
- $\vec{v}$: troisième vecteur unitaire de la base orthonormée directe ($\vec{z},\vec{u},\vec{v}$).

B. Relations entre coordonnées sphériques et cartésiennes :

On a : $\overrightarrow{OO_1}$= $r.\vec{w}$, en projetant $\overrightarrow{OO_1}$ dans la base ($\vec{z},\vec{u},\vec{v}$), on obtient :

$\overrightarrow{OO_1}$= r cos φ $\vec{z}$+ r sin φ $\vec{u}$, avec $\vec{u}$= cos θ $\vec{x}$+ r sin θ $\vec{y}$

Il vient : $\overrightarrow{OO_1}$= r cos φ $\vec{z}$+ r sin φ cos θ $\vec{x}$+ r sin φ sin θ $\vec{y}$.

Par identification, $\overrightarrow{OO_1}$= $r.\vec{w}$= x.$\vec{x}$ + y.$\vec{y}$ + z.$\vec{z}$, on obtient donc les trois relations suivantes :

x= r sin φ cos θ
y= r sin φ sin θ
z= r cos φ

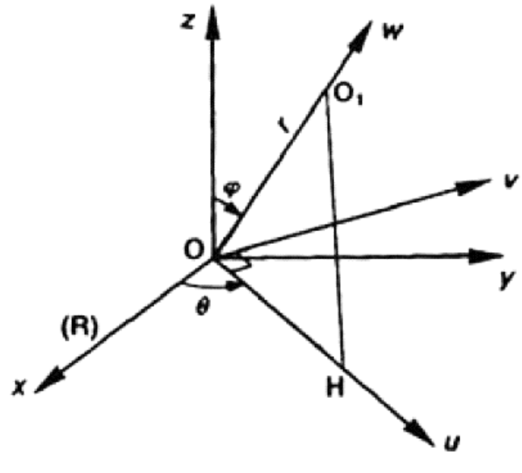


Figure.4. Système de coordonnées sphériques.

Remarque :

- r s'exprime en fonction des coordonnées cartésiennes par la relation :

$$r_{sph} = OO_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

2.2. Paramétrage de l'orientation de la base du repère associé à un solide :

Une fois l'origine O_1 du repère **R_1** associé au solide **(S1)** est paramétrée, on a besoin d'orienter la base ($\vec{x}1, \vec{y}1, \vec{z}1$) par rapport à la base ($\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) du repère absolu **R.** Pour cela, il faut et il suffit de définir trois paramètres géométriques, **usuellement, on choisit les trois angles d'Euler définis ci-après.**

2.2.1. Paramétrage usuel, angles d'Euler :

Il s'agit de trois angles : ψ, θ et φ qui permettent d'orienter les trois axes de la base ($\vec{x}1, \vec{y}1, \vec{z}1$) par rapport aux trois axes de la base ($\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) :

Les angles ψ, θ et φ sont tels que :

- Ψ =$(\vec{x}, \vec{u})$, avec $\vec{u}$: vecteur unitaire de direction D=$(A, \vec{x}, \vec{y})$ ∩ $(A, \vec{y}1, \vec{z}1)$ (voir figure. 5).
- θ =$(\vec{z}, \vec{z}1)$.
- φ =$(\vec{u}, \vec{x}1)$.

Pour passer de la base ($\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) à la base ($\vec{x}1, \vec{y}1, \vec{z}1$), on effectue **trois rotations planes** faisant intervenir deux bases intermédiaires (voir figures.6) :

$$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \xrightarrow{\text{Rot}(\vec{z},\,\psi)} \underbrace{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})}_{\text{Première base intermédiaire}} \xrightarrow{\text{Rot}(\vec{u},\,\theta)} \underbrace{(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}1)}_{\text{Deuxième base intermédiaire}} \xrightarrow{\text{Rot}(\vec{z}1,\,\varphi)} (\vec{x}1, \vec{y}1, \vec{z}1).$$

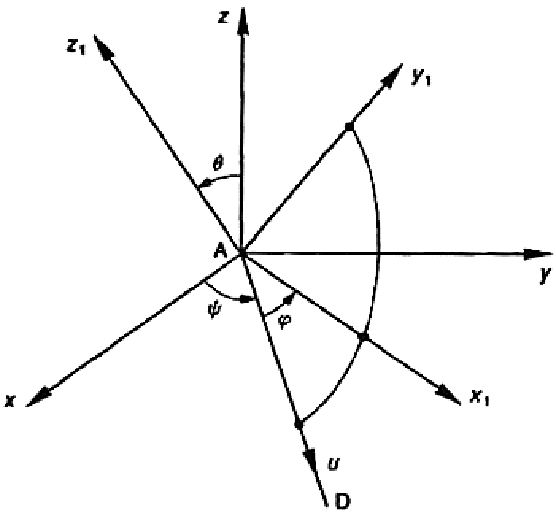


Figure.5. Les trois angles d'Euler : ψ, θ et φ.

2.2.2. Les figures de changement de base :

Pour schématiser le passage d'une base à l'autre par une simple **rotation plane**, autour d'un vecteur inchangé par cette rotation, donc commun aux deux bases, on utilise ce **qu'on appelle une figure plane ou figure de changement de base.**

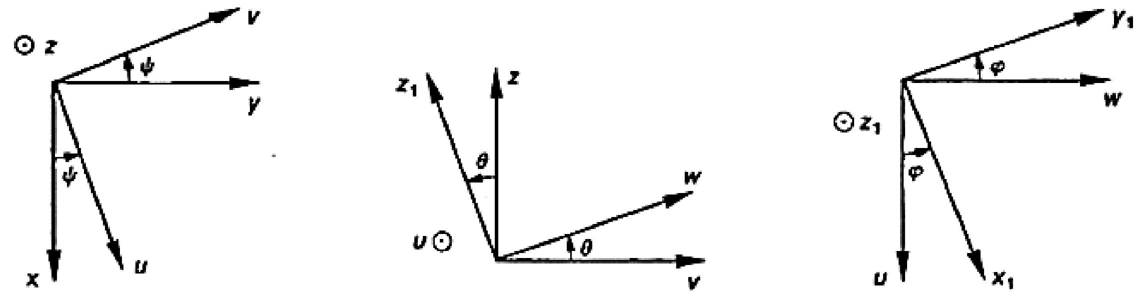


Figure.6. Figures planes correspondant aux trois angles d'Euler.

Pour construire une figure plane :

- Mettre le vecteur commun en premier, en position sortante (voir figure. 6).
- Présenter deux bases décalées d'un angle, de préférence, positif (sens trigonométrique) inférieur à 90°.
- Vérifier que ces deux bases sont directes (règle de la main droite).

2.2.3. **Exemple de mécanisme utilisant les angles d'Euler :**

Le schéma cinématique suivant correspond à une équilibreuse de roue.

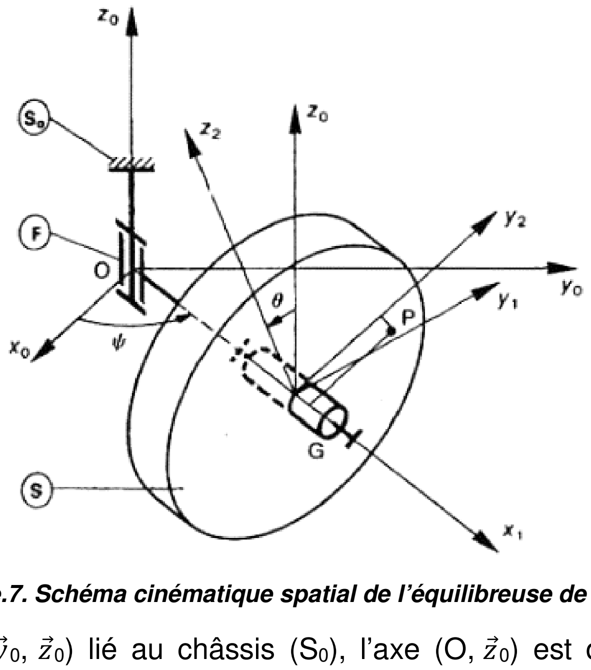


Figure.7. Schéma cinématique spatial de l'équilibreuse de roue.

Soit le repère R_0 (O, $\vec{x}_0$, $\vec{y}_0$, $\vec{z}_0$) lié au châssis (S_0), l'axe (O, $\vec{z}_0$) est dirigé suivant la verticale ascendante. La fusée (F) a une liaison pivot d'axe (O, $\vec{z}_0$) avec (S_0), soit R_1 (O, $\vec{x}_1$, $\vec{y}_1$, $\vec{z}_0$) un repère lié à (F), l'axe (O, $\vec{x}_1$) étant dirigé suivant l'axe de la fusée. On pose : $\psi = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$.

La roue (S) a une liaison pivot d'axe (O, $\vec{x}_1$) avec la fusée (F). Soit R2 (G, $\vec{x}_2$, $\vec{y}_2$, $\vec{z}_2$) un repère lié à (S). On pose $\overrightarrow{OG} = l\,\vec{x}_1$ et $\theta = (\vec{z}_0, \vec{z}_2)$.

L'orientation de la base ($\vec{x}_2$, $\vec{y}_2$, $\vec{z}_2$) par rapport à la base ($\vec{x}_0$, $\vec{y}_0$, $\vec{z}_0$) est obtenu par deux rotations planes d'angles ψ et θ, respectivement autour des axes $\vec{z}_0$ et $\vec{x}_1$. Les deux figures planes correspondantes sont représentées ci-après :

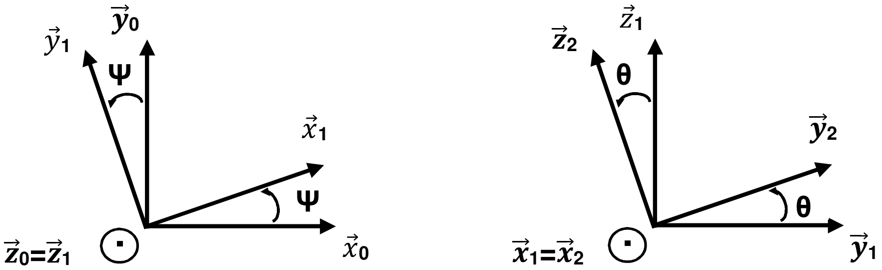


Figure.8. Figures planes correspondant au cas de l'équilibreuse de roue.

3. Paramétrage et calculs vectoriels usuels :

Le paramétrage d'un mécanisme, à travers le positionnement et l'orientation des repères associés aux solides qui le composent, est un outil pratique pour **mener des calculs mécaniques**, en vue d'évaluer des grandeurs évoluant dans le temps (position, vitesse, accélération, effort, couple, …etc.). **Deux opérations mathématiques fréquemment utilisées** et faisant partie du calcul vectoriel, sont **le produit scalaire et le produit vectoriel,** dans un espace de trois dimensions au maximum**. Dans les paragraphes suivants, on donne les bases nécessaires pour mener ces calculs.**

3.1. Produit scalaire :

3.1.1. **Définition :**

A. Expression géométrique :

Soit deux vecteurs quelconques $\vec{u}$ **et** $\vec{v}$ **et appartenant au même plan.**

Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$**, noté $\vec{u}.\vec{v}$,** est le scalaire (**donc le nombre réel**) :

$$\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}||.||\vec{v}||.\cos(\vec{u},\vec{v})$$

B. Expression analytique :

Soit deux bases **différentes** $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ et $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ **quelconques** tels que :

$\vec{u}=x_0.\,\vec{x}_0+ y_0.\,\vec{y}_0+ z_0.\,\vec{z}_0$, $\vec{v}=x_1.\,\vec{x}_1+ y_1.\,\vec{y}_1+ z_1.\,\vec{z}_1$.

Le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{u}$ **et** $\vec{v}$ est le scalaire :

$\vec{u}.\vec{v} = x_0.\,x_1(\vec{x}_0.\,\vec{x}_1)+ x_0.y_1(\vec{x}_0.\,\vec{y}_1)+ x_0.z_1(\vec{x}_0.\,\vec{z}_1)+ y_0.x_1(\vec{y}_0.\,\vec{x}_1)+ y_0.y_1(\vec{y}_0.\,\vec{y}_1)+ y_0.z_1(\vec{y}_0.\,\vec{z}_1)+ z_0.\,x_1(\vec{z}_0.\,\vec{x}_1)+ z_0.y_1(\vec{z}_0.\vec{y}_1)+ z_0.z_1(\vec{z}_0.\,\vec{z}_1)$.

3.1.2. **Résultats particuliers :**

- Pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$ **appartenant au même plan**, et dans le cas où les vecteurs sont unitaires, on a :

$$\vec{u}.\vec{v} = \cos(\vec{u},\vec{v})$$

- Dans le cas où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs **quelconques, mais exprimés dans une <u>même</u> base <u>orthonormée directe</u>,** donc $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, on a :

$$\vec{u}.\vec{v} = x_0.\,x_1+ y_0.\,y_1 + z_0.\,z_1$$

3.2. Produit vectoriel :

3.2.1. Définition :

A. Expression géométrique :

Soit deux vecteurs quelconques $\vec{u}$ **et** $\vec{v}$ **et appartenant au même plan** (cas répondu en SI).

Le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, **noté** $\vec{u} \wedge \vec{v}$, est **le vecteur** :

- Dont la direction est **perpendiculaire au plan** contenant $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- Dont le sens est celui obtenu par **la règle de la main droite.**
- Dont la norme est : **$||\vec{u}||.||\vec{v}||.|\sin(\vec{u},\vec{v})|$.**

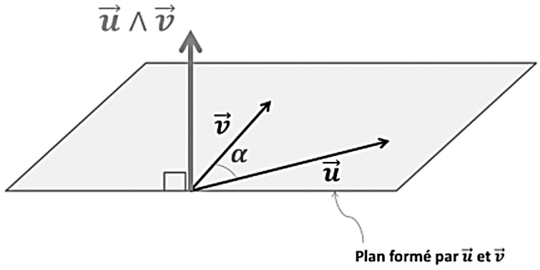


***Figure.9. Produit vectoriel de deux vecteurs coplanaires,** $\vec{u}$ et $\vec{v}$.*

B. Expression analytique :

Soit deux bases **différentes** $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ et $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ **quelconques** tels que :

$\vec{u}=x_0.\vec{x}_0+ y_0.\vec{y}_0+ z_0.\vec{z}_0$, $\vec{v}=x_1.\vec{x}_1+ y_1.\vec{y}_1+ z_1.\vec{z}_1$.

Le produit vectoriel des deux vecteurs $\vec{u}$ **et** $\vec{v}$ est le vecteur :

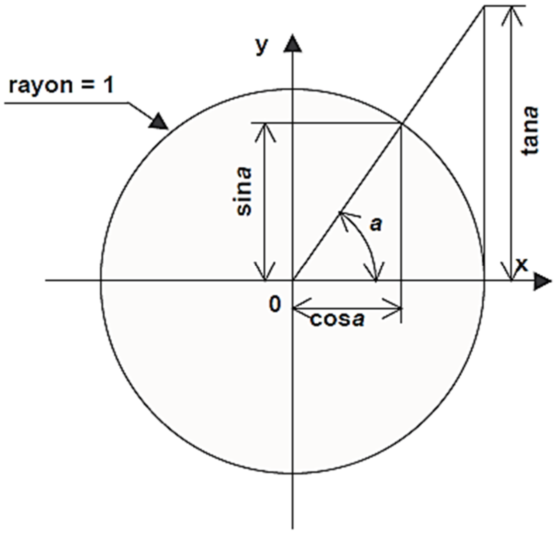
$\vec{u} \wedge \vec{v} = x_0.x_1(\vec{x}_0\wedge\vec{x}_1)+ x_0.y_1(\vec{x}_0\wedge\vec{y}_1)+ x_0.z_1(\vec{x}_0\wedge\vec{z}_1)+ y_0.x_1(\vec{y}_0\wedge\vec{x}_1)+ y_0.y_1(\vec{y}_0\wedge\vec{y}_1)+ y_0.z_1(\vec{y}_0\wedge\vec{z}_1)+ z_0.x_1(\vec{z}_0\wedge\vec{x}_1)+ z_0.y_1(\vec{z}_0\wedge\vec{y}_1)+ z_0.z_1(\vec{z}_0\wedge\vec{z}_1)$.

3.2.2. Résultat particulier :

Dans le cas où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs **quelconques, mais exprimés dans une <u>même</u> base <u>orthonormée directe</u>,** donc $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, on a :

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = (y_0.z_1 - z_0.y_1)\,\vec{x}_1 + (z_0.x_1 - x_0.z_1)\,\vec{y}_1 + (x_0.y_1 - y_0.x_1)\,\vec{z}_1.$$

4. Annexe : relations trigonométriques :



$$\cos 0 = 1 \ ; \ \sin 0 = 0 \ ; \ \tan 0 = 0$$

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \ ; \ \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \ ; \ \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ ; \ \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ ; \ \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \ ; \ \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \ ; \ \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0 \ ; \ \sin\frac{\pi}{2} = 1 \ ; \ \tan\frac{\pi}{2} \text{ non définie}$$

$$\cos(-a) = \cos a \ ; \ \sin(-a) = -\sin a \ ; \ \tan(-a) = -\tan a$$
$$\cos(\pi - a) = -\cos a \ ; \ \sin(\pi - a) = \sin a \ ; \ \tan(\pi - a) = -\tan a$$
$$\cos(\pi + a) = -\cos a \ ; \ \sin(\pi + a) = -\sin a \ ; \ \tan(\pi + a) = \tan a$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a \ ; \ \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a \ ; \ \tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \frac{1}{\tan a}$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a \ ; \ \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos a \ ; \ \tan\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\frac{1}{\tan a}$$

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$$

$$\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a.\cos b + \cos a.\sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a.\cos b - \cos a.\sin b$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$
$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$$
$$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\sin 2a = 2\cos a.\sin a$$